

Entnimmt man noch den Wert von $B B^*$ aus (39), so wird schließlich

$$(46) \quad []_B = 8 \pi^2 \alpha^2 Z^2 \beta^2 \frac{\hbar^6 c^6}{E_0^3} \frac{(1 - \beta^2)^3}{(1 - \sqrt{1 - \beta^2})^4} \left(-\frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2} + \frac{1}{1 - \beta \cos \vartheta} \right) \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \vartheta)^3}.$$

Durch ähnliche Rechnungen findet man aus (37):

$$(47) \quad []_R = 2 \pi^2 \alpha^2 Z^2 \beta^2 \frac{\hbar^6 c^6}{E_0^3} \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - \sqrt{1 - \beta^2})^2} \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^3}.$$

Da hier der Winkel φ nicht vorkommt, nannten wir diesen Bestandteil „ringförmig“.

Als Summe von (46) und (47) ergibt sich, wenn wir den Faktor vor der Klammer in (46) mit F bezeichnen:

$$(48) \quad []_R + []_B = \frac{F}{4} \frac{(1 - \sqrt{1 - \beta^2})^2}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^3} - \frac{F}{2} \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2} \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \vartheta)^3} + F \frac{\sin^2 \vartheta \cos^3 \varphi}{(1 - \beta \cos \vartheta)^4}.$$

Das letzte Glied ist die uns wohlbekannte nicht-relativistische K -Emission; die beiden ersten Glieder stellen relativistische Effekte dar, die um so stärker betont sind, je weniger β von 1 verschieden ist, vgl. die Nenner $(1 - \beta^2)^{3/2}$ und $1 - \beta^2$; ihre Voreilung ist geringer als die des nicht-relativistischen Gliedes (dritte Potenz des Nenners $1 - \beta \cos \vartheta$, statt der vierten). Alle drei Glieder sind erstmalig von Sauter¹⁾ auf etwas anderem Wege gefunden worden. Von Interesse ist dabei die folgende Feststellung: Der Nenner $(1 - \beta \cos \vartheta)^4$ im letzten Glied von (48) ist relativistisch streng, sofern β aus der Spannung nach der relativistischen Mechanik berechnet wird, also genauer als die früher gefundene Form $(1 - \beta \cos \vartheta + \gamma)^4$, die sich bei nicht-relativistischer Definition von β in (4. 20a) ergab. Es wurde schon dort bemerkt, daß das kleine Korrektionsglied γ bei unrelativistischer Rechnung nicht garantiert werden konnte. Jetzt zeigt sich, daß es in Strenge verschwindet. Dies konnte bei der Diskussion der Beobachtungen von Lutze, vgl. S. 438, bestätigt werden.

¹⁾ F. Sauter, Ann. d. Phys. **11**, 454 (1931), Gl. (30); vgl. auch die vorangehende Arbeit, ebenda **9**, 217 (1931).

Zum Öffnen der Kommentare auf dieses Symbol klicken:



<http://www.mikomma.de/soqsp/soqsp.htm>

7. Kapitel

Das kontinuierliche Röntgen-Spektrum



§ 1

Historische Einleitung und Übersicht

Die ersten theoretischen Vorstellungen über den Ursprung der Röntgenstrahlen (Stokes, Wiechert) betrafen den durch den Aufprall der Kathoden-Strahlen erzwungenen Anteil der Strahlung (das „weiße Röntgenlicht“, vgl. Bd. I, S. 31). Verfasser schlug dafür den (von Röntgen selbst gebilligten) Namen Bremsstrahlung vor. Ihre Härte wächst mit der an der Röhre liegenden Spannung und ist von der atomaren Zusammensetzung der Antikathode unabhängig. Für die Röntgentechnik ist diese Bremsstrahlung der maßgebende Bestandteil des Strahlungs-Gemisches.

Der selektive Anteil des Röntgenlichtes, der den freien Atomschwingungen entspricht, wurde erst 1906 von Barkla entdeckt. Die Härte dieses Anteils ist im Prinzip von der Spannung unabhängig (wird von dieser nur sekundär durch Verschiebung der Anregungs-Grenzen beeinflusst).

Seit der Laueschen Entdeckung weiß man, daß der erste Anteil ein kontinuierliches Spektrum von Frequenzen besitzt, der zweite ein diskretes. Das kontinuierliche Spektrum hat eine kurzweilige Grenze (Duane und Hunt, D. L. Webster), gegeben durch die Quantengleichung (1)

$$\hbar \nu_{\max} = e V \quad (V = \text{Röhrenspannung}).$$

Die klassische Brems-Vorstellung konnte von diesem fundamentalen Zusammenhang natürlich keine Rechenschaft geben. Dagegen machte sie eine Besonderheit in der räumlichen Ausbreitung der Bremsstrahlung wenigstens qualitativ verständlich: Die Voreilung des Maximums der Ausstrahlung, zuerst beobachtet von Bassler¹⁾ (bei Röntgen ausgeführte Dissertation, München 1908) und J. Stark²⁾ 1909. In Bd. I, S. 35, Fig. 11, haben wir die Erscheinung nach neueren Versuchen von Kulenkampff³⁾ dargestellt,

¹⁾ Ann. d. Phys. **28**, 808 (1909).

²⁾ Physik. Zeitschr. **10**, 902 (1909). Ebenda die theoretische Erklärung der Voreilung durch den Verf., S. 969, und anschließende Diskussion Stark-Sommerfeld.

³⁾ H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. **57**, 597 (1928). Zusammenfassende Darstellung im Handb. d. Phys., Bd. 23/2, 2. Aufl. (1933).

ausgeführt mit extrem dünnen Filmen als Antikathode (die älteren Versuche waren mit Voll-Antikathoden gemacht und daher durch Sekundär-Prozesse beeinträchtigt). Jene Figur ähnelt unserer jetzigen Fig. 26 beim Photo-Effekt trotz des entgegengesetzten Charakters der Strahlung in beiden Fällen: Beim Photo-Effekt geschieht die Anregung durch elektromagnetische Strahlung, die angeregte Strahlung besteht aus Elektronen, beim kontinuierlichen Röntgenspektrum ist es umgekehrt.

In der provisorischen Theorie des Verfassers (vgl. Anm. 2, S. 495) blieb ein Parameter unbestimmt, der „Bremsweg“ l , der als subatomare Länge gedacht war und in Richtung des einfallenden Kathodenstrahles liegen sollte. Äquivalent mit dem Bremswege l ist die „Bremsdauer“ $\tau = l/\bar{v}$, \bar{v} = Zeitmittel der Geschwindigkeit des einfallenden Kathodenstrahles auf dem Bremswege. Verfasser versuchte diese Größe durch ein besonderes, ad hoc ersonnenes Postulat zu bestimmen, dem er ursprünglich die Form gab (E gleich Anfangs-Energie des Elektrons):

$$(2) \quad E\tau = h$$

oder auch (E_{kin} gleich der während der Bremsung abnehmenden kinetischen Energie des Elektrons)

$$(2a) \quad \int_0^{\tau} E_{\text{kin}} dt = h.$$

Man kann dazu bemerken, daß (2a) ein Vorläufer des späteren Phasen-Integrals

$$(2b) \quad \oint p dq = h$$

war, nämlich die im relativistischen Sinne genommene vierte Komponente desselben.

Freilich konnte dieses Postulat noch nicht den fundamentalen Satz (1) von der (damals noch unbekannt) kurzwelligen Grenze des Spektrums erklären. Aber es gab in einfacher Weise Rechenschaft von zwei anderen Erfahrungstatsachen, nämlich a) der Proportionalität der Röntgen-Intensität mit dem Quadrate der Röhren-Spannung, und b) von dem kleinen Wirkungsgrad beim Umsatz Kathodenstrahl-Energie \rightarrow Röntgen-Energie.

a) Aus der klassischen Ausstrahlungs-Formel

$$(3) \quad S = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}^2$$

folgt für die im ganzen Bremsprozeß von $t = 0$ bis $t = \tau$ ausgestrahlte Energie E_r , wenn man \dot{v} konstant, also gleich $-v/\tau$ setzt, unter v die Anfangs-Geschwindigkeit des Elektrons verstanden,

$$(3a) \quad E_r = \int_0^{\tau} S dt = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{v^2}{\tau}.$$

Wegen (2) und wegen der Bedeutung von $E = \frac{m}{2} v^2$ kann man hierfür schreiben

$$(3b) \quad E_r = \frac{4}{3} \frac{e^2}{m c^3} \frac{E^2}{h}.$$

Man hat also in der Tat Proportionalität mit E^2 , also auch mit V^2 [V = Röhrenspannung wie in (1)].

b) Gleichzeitig folgt aus (3b):

$$\frac{E_r}{E} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{h c} \frac{v^2}{c^2} = \frac{\alpha}{3\pi} \beta^2,$$

also z. B. mit $\beta = \frac{1}{3}$ (entsprechend $V = 30$ kV):

$$(3c) \quad \frac{E_r}{E} = \frac{1}{3\pi} \frac{1}{137} \frac{1}{9} \sim 10^{-4}.$$

Dies ist der zuerst von W. Wien¹⁾ gemessene, überraschend kleine Wirkungsgrad des Umsatzes Kathoden- in Röntgenstrahlen.

Als Verfasser diese Ansätze auf dem ersten Solvay-Kongreß (1911) vortrug, machte Einstein dazu eine interessante Bemerkung: Er schlug als Alternative vor, das Quantenmäßige in die Strahlung zu verlegen und den Bremsprozeß unbestimmt zu lassen [während bei der vorstehenden Rechnung umgekehrt das Quantenmäßige in den Atomprozeß gelegt war, Gl. (2), und die Strahlung klassisch gelassen war, Gl. (3)]. Man kann z. B. mit Einstein den Bremsprozeß als plötzlich annehmen, also das nebenstehende Bild benutzen. Dasselbe liefert, in einem beliebigen Zeitintervall T nach Fourier entwickelt:

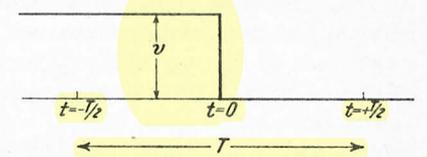


Fig. 29. Fourier-Entwicklung eines plötzlichen Brems-Prozesses nach Einstein.

$$(4) \quad v(t) = \frac{v}{2} - \frac{2v}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \sin \frac{2\pi n t}{T}.$$

Daraus folgt durch Differentiation nach t eine offenbar divergente Reihe. Einstein schneidet sie zum Zwecke der Strahlungs-Berechnung bei einem gewissen Gliede $n = N$ ab und schreibt

$$(4a) \quad \dot{v}(t) = -\frac{4v}{T} \sum_{n=1,3,\dots,N} \cos \frac{2\pi n t}{T},$$

¹⁾ W. Wien, Ann. d. Phys. 18, 911 (1905); Beattie, Proc. Roy. Soc. 89, 314 (1913); vgl. auch O. W. Richardson, Zeeman-Festschrift, S. 80, Haag 1935.

indem er annimmt, daß die höheren Glieder $n > N$ nichts zur Strahlung beitragen.

Die Grenze N wird nun folgendermaßen bestimmt: Ersichtlich ist die Schwingungszahl ν des einzelnen Fourier-Gliedes gegeben durch

$$(4b) \quad \nu = \frac{n}{T}.$$

Die maximale Schwingungszahl, die bei der Anfangs-Energie E zur Verfügung steht, sei bestimmt durch das Quanten-Postulat

$$(4c) \quad E = h \nu_{\max}.$$

Diesem ν_{\max} entspricht nach (4b) ein n_{\max} , welches eben die fragliche Grenze N liefert, nämlich

$$(4d) \quad N = \frac{E}{h} T.$$

Nun gehört nach (3) zum einzelnen Gliede der Fourier-Entwicklung (4a) die Ausstrahlung

$$S = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{16 v^2}{T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos^2 \frac{2\pi n t}{T} dt = \frac{16}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{v^2}{T};$$

[die beim Quadrieren von (4a) entstehenden Produkt-Glieder geben keine Ausstrahlung]. Die Gesamt-Ausstrahlung E_r wird daher mit Rücksicht auf (4d) und den Zusammenhang von v^2 mit E :

$$(4e) \quad E_r = N S = \frac{16}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{v^2 E}{h} = \frac{32}{3} \frac{e^2}{m c^3} \frac{E^2}{h}.$$

Dies stimmt (von dem unwesentlichen Zahlenfaktor abgesehen) mit (3b) überein. Gleichzeitig folgt dann auch für den Wirkungsgrad E_r/E die oben unter (3c) angegebene Größenordnung.

Wir haben diese etwas kühne Einsteinsche Methode des Abschneidens hier angeführt, weil sie das erste Beispiel ist für ein Verfahren, welches seitdem — in Ermangelung von etwas Besserem — immer dann angewendet wird, wenn man auf divergente Ausdrücke geführt wird (insbesondere in der Diracschen Theorie der negativen Energie-Niveaus, vgl. Kap. IV, S. 313 (von Pauli gelegentlich etwas abschätzig als „Subtraktions-Physik“ bezeichnet). —

Da es sich bei den Problemen des Brems-Spektrums durchweg um Intensitätsfragen handelt, war ihre systematische Behandlung erst möglich auf Grund des Korrespondenz-Prinzips, oder strenggenommen erst auf Grund der Wellenmechanik. Eine erfolgreiche korrespondenzmäßige Be-

handlung gab Kramers¹⁾; seine für die Astrophysik wichtigen Resultate werden in § 8 besprochen werden. Die wellenmechanische Behandlung wurde von verschiedenen Seiten in Angriff genommen²⁾. Oppenheimer erkannte, daß die parabolischen Koordinaten dem Problem besonders angepaßt sind, und operierte mit dem vollständigen System der in diesen Koordinaten separierten Wasserstoff-Eigenfunktionen. Eine einfachere Darstellung erzielte Verfasser durch Benutzung von (ebenfalls mit den parabolischen Koordinaten zusammenhängenden) Eigenfunktionen, die uns schon beim Photoeffekt nützlich waren. Bevor wir aber die mit diesen Eigenfunktionen zu erhaltenden Resultate besprechen, wollen wir die Methodik der Wellenmechanik in dem vorliegenden Falle schildern und mit der klassisch-korrespondenzmäßigen vergleichen.

Wellenmechanisch wird der Anfangszustand des Systems dargestellt durch eine aus dem Unendlichen kommende, unendlich ausgebreitete ebene Welle, die an dem Coulomb-Felde des Kerns gestreut wird. Die Frage, ob das Atom von dem Elektron zentral oder peripher getroffen wird, tritt gar nicht auf. Alle individuellen Möglichkeiten des Zusammenstoßes werden in einem einheitlichen Wellenbild zusammengefaßt.

Ebenso wird der Endzustand, in dem das Elektron mit verringerter Geschwindigkeit das Atom verläßt, durch eine ebene Welle beschrieben, ebenfalls gebeugt am Atomkern. Die Fortschrittrichtung der Welle, d. i. die Richtung des austretenden Elektrons, bleibt unbestimmt; jede Richtung ist a priori gleich wahrscheinlich mit jeder anderen.

Um nun die Intensität der Ausstrahlung beim Übergang aus dem Anfangs- in den Endzustand zu berechnen, hat man nur die zugehörigen Wellenfunktionen nach dem Formalismus des Matrix-Elementes zu kombinieren. Über die Art des Überganges braucht dabei nichts vorausgesetzt zu werden, ebensowenig wie in der Theorie der Linienspektren der Übergang aus dem Anfangs- in den Endzustand spezifiziert zu werden braucht.

Der Unterschied dieser wellenmechanischen Methode gegenüber der klassisch-korrespondenzmäßigen springt in die Augen: Bei letzterer haben wir eine Ausstrahlung, die aus der jeweils herrschenden Geschwindigkeitsänderung längs der klassischen Bahn (einer Hyperbel) kausal bestimmt ist, bei ersterer dagegen genügt die Gegenüberstellung von Anfangs- und Endzustand, wobei der Ursprung der Strahlung im Dunkeln bleibt. Man beachte insbesondere auch folgendes: Im Matrixelement wird über den ganzen

¹⁾ H. A. Kramers, Phil. Mag. **46**, 836 (1923).

²⁾ J. R. Oppenheimer, Zeitschr. f. Phys. **55**, 725 (1929); Y. Sugiura, Phys. Rev. **34**, 858 (1929); J. A. Gaunt, Proc. Roy. Soc. **126**, 654 (1930); A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **11**, 257 (1931).